

# 三维形体的形态学运算及应用\*

方伟 李叔梁 吴佑寿

(清华大学电子工程系 北京 100084)

**摘要** 本文首先讨论了边界表示的物体的形态学运算问题。文中讨论了任意形状的物体,包括凸物体和非凸物体;引入了负形体的概念;并提出了2D和3D连续物体的Minkowski运算的统一算法。利用这一算法,提出了3D任意形体间的变形新算法,把边界表示的物体的形态学运算的概念扩展到任意曲线和任意曲面上,并且介绍了3D物空间中曲线的概念和3D物空间双参数曲面的概念。文中任意形体的3D变形算法能很好地解决具有不同拓扑结构的3D边界表示的物体之间的变形问题。

**关键词** Minkowski运算,数学形态学,变形\*

## 1 问题的提出

数学形态学中的形态和差(即膨胀与腐蚀)运算,形成了数学形态学的基础。从中发展起来的图象形态学,已在图象处理中得到了广泛的应用<sup>[1,2]</sup>。形态和差运算(Minkowski结构和差)产生的形态膨胀与腐蚀是其形态运算的核心。形态和差运算是定义在集合运算之上的。二维图象是一个二维离散点的集合,是一个有限的点集,因此在它的基础上进行形态和差运算也就成了点的运算。它的结果很容易得到,这也正是形态学在图象处理中得到广泛应用的原因之一。而对于一个二维或三维连续闭集(如一个多边形或一个多面体),由于它们不再是有限的点的集合,要进行形态和差运算就不那样简单了。对于一个连续的二维或三维形体,我们可以用其边界来表示,即形体 $A$ 其边为 $\partial A$ 。形体 $A, B$ 的形态和差的计算也就成了其边界的形态和差的计算。但是很明显, $\partial(A \oplus B) \neq \partial A \oplus \partial B, \partial(A \ominus B) \neq \partial A \ominus \partial B$ 。如何有效地进行连续闭集的形体和差运算,正是本文所要研究的问题。

前人在这个问题上已经作过不少工作。在检测二个凸多边形的最小距离时, Schwartz<sup>[3]</sup>提出了一个计算两个凸多边形的形态和(Minkowski和)的算法。其算法的复杂度为 $O(n)$ ,  $n$ 为输入的多边形的总顶点数。Guibas, Ramshaw, Stolfi等人<sup>[4]</sup>也研究了二维空间中的与Minkowski和运算相类似的旋转运算。Ghosh<sup>[5]</sup>发表了一个限制在平面域的形态和差运算。Kaul和Rossignac<sup>[6]</sup>提出了两个用于计算多面体的形态和运算的方法。其中一个是针对一般的多面体的,一个是针对凸多面体的。以上这些工作都没有针对任意的形体(包括有孔的任意形体)的。本文的工作正是针对任意的形体的。

## 2 形体形态和差的一般计算

二个任意形体之间形态和差结果的计算,即考察 $E^2, E^3$ 空间中的任意多边形和任意多面体。我们首先从简单的形体开始讨论。

### 2.1 两个凸集的形态和计算

一个二维或三维形体可以分为两大类,即凸集

和凹集。凸集是欧氏空间中最基本最重要的集合类,因此我们首先要考查凸集的情况。

对于一个凸集,我们也可以用包含它的闭半空间之交集来定义:

$$X \in E^d \quad X = \bigcap_i \Pi_i \quad \forall \Pi_i \supset X$$

$\Pi_i$  为闭半空间,

$$\Pi_i = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_j a_j x_j \leq k, \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in E^d, a_j, k \in E^d\} \quad (1)$$

对于一个凸集的边界面我们可以通过方向函数和超平面来定义。

**定义 1:**  $A$  为一个  $E^d$  空间中的凸集,  $u \in E^d$ 。则  $A$  在  $u$  方向上的方向函数  $H(A, u)$  定义为:

$$H(A, u) = \sup \{ \langle a, u \rangle \mid a \in A \} \quad (2)$$

当  $A$  存在边界, 且  $u \neq 0$  时,  $H(A, u) < \infty$ , 故  $A$  在  $u$  方向上的超平面定义为:

$$L(A, u) = \{ p \in E^d \mid \langle p, u \rangle \geq H(A, u) \} \quad (3)$$

在  $E^2$  情况下,  $L(A, u)$  变为有外向法线  $u$  的直线, 在  $E^3$  情况下,  $L(A, u)$  为一个平面。

对于  $A$  中的一个边界面, 其外向法线为  $u$ , 也可以定义为  $F(A, u) = L(A, u) \cap A$ 。  $F(A, u)$  实际上是一组有着外向法线  $u$  的边界点的集合。因此, 对于  $E^2$  空间中所有的方向  $u$ , 其相应的  $F(A, u)$  的集合则为  $A$  的整个边界。为了不失一般性, 我们将  $u$  定义为一个单位矢量。且  $u \in S^{d-1}$ , 即  $E^d$  中的一个单

位球, 由此可得:

$$\partial A = \bigcup_{u \in S^{d-1}} F(A, u) \quad (4)$$

对于一个  $d$  维空间中的凸集  $A$ , 则  $F(A, u)$  可以是  $0, 1, \dots, (d-1)$  维的。对于  $E^2$  空间, 一个凸多边形的  $F(A, u)$  是顶点(0 维)或边(1 维), 对于  $E^3$  空间,  $F(A, u)$  分别为顶点、或边、或面, 如图 1 所示。

**定理 1:**  $A, B$  为  $E^d$  空间的二个凸集,  $S = A \oplus B$ 。

对于每一个  $u \in S^{d-1}$ , 则  $F(S, u) = F(A, u) \oplus F(B, u)$

因此,  $S$  的边界  $\partial S$  为:

$$\partial S = \partial(A \oplus B) = \bigcup_{u \in S^{d-1}} F(S, u) \\ = \bigcup_{u \in S^{d-1}} (F(A, u) \oplus F(B, u)) \quad (5)$$

则求二个形体形态和的边界, 可以将其分解成简单的低维的面  $F(A, u), F(B, u)$  之间的形态和。由于  $F(A, u)$  和  $F(B, u)$  本身又可以分解, 因此我们可以将其分解为简单的顶点的和运算以及重组。

我们来讨论二维平面中的情况。对于两个凸多边形, 其任意一个  $F(A, u), F(B, u)$  都可以分解成以下三种情况:

- (1) 两个顶点的形态和  $Vertex_A \oplus Vertex_B$ 。由形态和定义可得其为  $V_A + V_B$ 。
- (2) 顶点和边的形态和  $E_A \oplus V_B, V_A \oplus E_B$ 。即  $E_A$  或  $E_B$  被顶点  $V_B$  或  $V_A$  平移, 其结果为  $V_{E_{A1}} + V_B, V_{E_{A2}} + V_B$  或  $V_{E_{B1}} + V_A, V_{E_{B2}} + V_A$ , 也是两个顶点的和。
- (3) 两个边的形态和  $E_A \oplus E_B$ 。

两个平行边的和还是一平行边, 顶点分别为  $V_{E_{A1}} + V_{E_{B1}}, V_{E_{A2}} + V_{E_{B2}}$ 。

因此, 二个凸多边形的形态和边界将是相应顶点的和, 边仍是两者相应边的方向。

为了给出计算二个凸集形态和的算法, 我们首先给出判别公式的定义。

**定义 2:**  $N$  为一集合  $A$  上的法线,  $P$  为  $A$  边界上的一点, 当且仅当存在  $P$  点并存在一个开邻域与以  $N$  为法线的半空间  $\{x : \langle x - p, N \rangle > 0\}$  的交集与  $A$  不相交, 则这种关系称为局部方向边界, 我们用  $LSD(N, A, P)$  表示。

对于一个凸多边形, 其边的矢

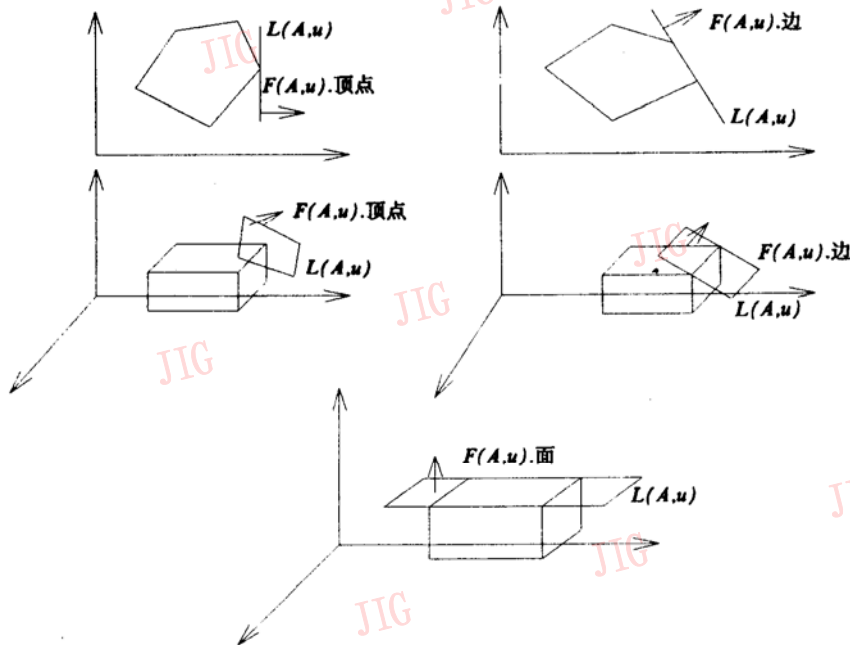


图 1  
Fig:1

量为 $\overline{V_i V_{i+1}}$ ,  $V_i$ 为第*i*个顶点,  $V_{i+1}$ 为与之相连的下一个顶点。其整个多边形的左手系法线为 $\vec{N}_P$ , 则第*i*边的外向法线为 $\overline{V_i V_{i+1}} \times \vec{N}_P$ 。对于 $E_A \oplus E_B$ 的情况, 即 $\vec{N}_{e_A} = \vec{N}_{e_B}$ 时,  $\overline{V_i V_{i+1}A} \oplus \overline{V_j V_{j+1}B}$ 由形态和的定义可得新产生的边 $E_S$ 的两个顶点为 $V_L, V_{L+1}$ , 即 $V_{L+1} = V_{i+1} + V_{j+1}, V_L = V_i + V_j$ 。对于 $V_A \oplus V_B$ 的情况, 则新的边为 $V_L = V_A \oplus V_j, V_{L+1} = V_A + V_{j+1}$ 。

下面我们给出有关二个凸多边形的形态和的计算算法。

Convex - Polygm - Minkowski sum(A, B)

begin.

- ① 遍历 A, B 的边, 如果  $E_A$  和  $E_B$  的外法线  $\vec{N}_{E_A}$  和  $\vec{N}_{E_B}$  一致, 则把  $E_A, E_B$  相加, 放入 C 中。
- ② 遍历 A 的边, B 的顶点, 如  $LSD(\vec{N}_{E_A}, B, V_B)$  成立, 则把  $E_A$  加上  $V_B$  的平移, 放入 C 中。
- ③ 遍历 A 的顶点, B 的边, 如  $LSD(\vec{N}_{E_B}, A, V_A)$  成立, 则把  $E_B$  加上  $V_A$  的平移, 放入 C 中。
- ④ 重整 C 的边表, 按顶点关系重新构造出新的多边形 C。

end

以上给出了二维情况下凸多边形的形态和算法, 现在考虑一下三维情况下的凸多面体的形态和  $S = A \oplus B$ 。根据前面的讨论, S 的边界  $\partial S$  完全可以由  $F(A, u)$  定义, 这些面可以分为以下几种情况:

- (1) 二个面的形态和  $F_A \oplus F_B$  它可以转化为二个凸多边形之形态和, 可由上述算法得到。
- (2) 一个面和一条边的形态和  $F_A \oplus E_B$  或  $E_A \oplus E_B$  对于一个条边, 这是一个退化的面, 也可由上述算法得到。
- (3) 一个面和一个顶点的形态和  $F_A \oplus V_B$  或  $V_A \oplus F_B$  在这种情况下, 面是相对顶点平移, 即面的顶点和顶点之间的和为  $V_{FA} + V_B$  或  $V_A + V_{FB}$ , 面的形状不变。
- (4) 二条互不平行的边的形态和  $E_A \oplus E_B$  这种情况也可以由算法一得到。

因此我们可以把二个凸多面体的形态和简化为二维的凸多边形的形态和的计算。同样, 在  $E^d$  下的凸集的形态和的计算可以简化为在  $E^{d-1}$  下的形态和的降维计算。即最终都可归结为顶点之间的和运

算。

2.2 凸集的形态差计算

在数学上, 二个实数的差  $r_1 - r_2$ , ( $r_1, r_2$  为实数), 可以看成是  $r_1 + (-r_2)$ , 由此引入了一个负数的定义。对于形态差运算  $A \ominus B$ , 也同样可以引入一个负集(负形体)  $B^{-1}$ 。则  $A \ominus B = A \oplus B^{-1}$ 。由形态和差性质可得:

$$B \oplus \{\emptyset\} = B, \quad \{\emptyset\} \text{ 为一个单点集}$$

故  $B \ominus B = B \oplus B^{-1}$  的充分必要条件是  $B \oplus B^{-1} = \{\emptyset\}$ , 由此和负数一样, 我们引一个负集概念  $B^{-1}$ 。

在数学意义上, 对于 B 中任意一个点  $P, P \in B$ , 一定存在一个点  $P_1 \in B^{-1}$ , 使得  $P + P_1 = 0$ 。其中

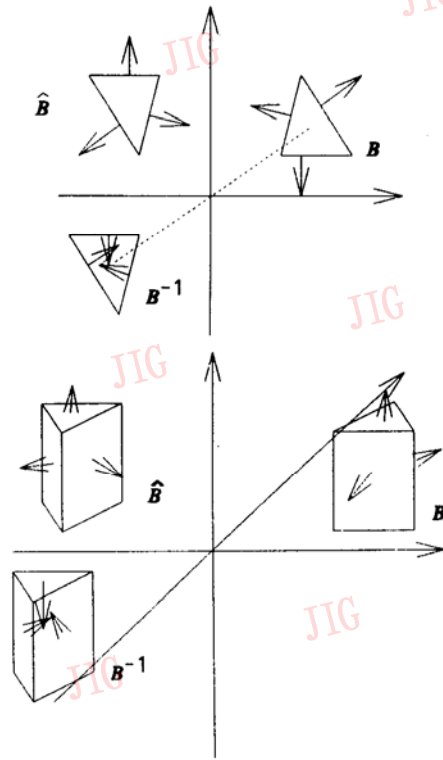


图2  
Fig. 2

“+”为一般矢量和, 0 为零矢量, 由此  $P_1 = -P$ 。  $B^{-1}$  和 B 的原点对称集  $\hat{B}$  有一些类似。但  $B^{-1} \neq \hat{B}, B \oplus \hat{B} \neq \{\emptyset\}, B^{-1}$  和  $\hat{B}$  的差别主要在于它们的外向法线不一样。图 2 给出了  $B, \hat{B}, B^{-1}$  的示意图。形体的外向法线是指由形体内部的点指向形体外部的点并垂直于所通过的面; 内向法线正好相反, 即由形体外部指向形体内部。对于负形体, 情况显然与此相反, 即它的外向法线是由形体外指向形体内, 在几何

意义上,它有些类似于一个孔。实际上它是不存在的,这和数学上的  $\sqrt{-1}$  有些类似。因此,  $B, \hat{B}$  对我们来说是一个正形体,  $B^{-1}$  是一个负形体。  $B$  和  $B^{-1}$  对称的面有相同的法线。

引入一个负形体的概念以后,我们就可以把形态差按形态和来处理了。同时,由于引入了负形体,同样也要对算法一进行一些相应的调整。

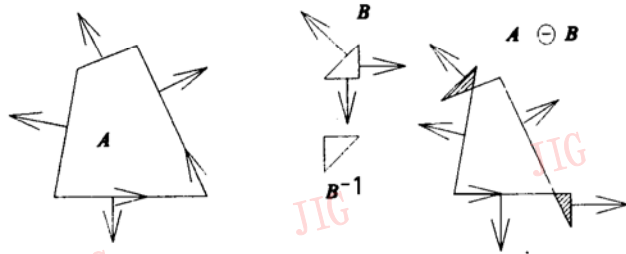


图 3  
Fig. 3

同样,我们先来考虑在  $E^2$  下的二个凸多边形,  $A$  和  $B$  的形态差  $A \ominus B$ , 它转化为  $A \oplus B^{-1}$ ,  $A$  和  $B^{-1}$  的多边形法线  $N_{P_A}, N_{P_B^{-1}}$  是一致的, 经过算法计算以后, 如图 3 所示。

对于形态差的结果, 由于在  $e_A \oplus e_{B^{-1}}$  中, 当  $|e_A| < |e_{B^{-1}}|$  时会出现负形体边。同样对  $\forall A \oplus e_{B^{-1}}$  也一样, 因此在  $S = A \oplus B^{-1}$  的结果中会出现负形体, 即法线向内的形体, 这在结果中是要去除的, 如图 3 的阴影部分。同样对于在  $E^3$  下的凸面体, 也会产生负形体的情况, 如图 4 所示。因此我们需要对算法一进行调整。

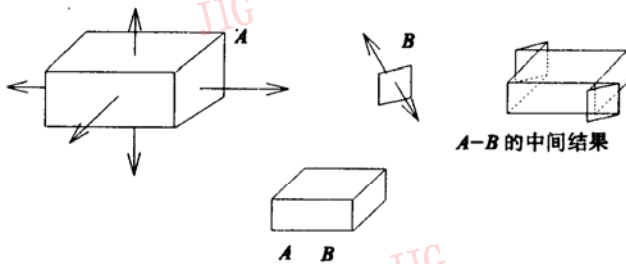


图 4  
Fig. 4

对于一个多边形, 如果其法线为  $\vec{N}$ , 而按其顶点的排列由左手坐标也可得到一个法线  $\vec{N}_R$ 。当  $\vec{N} = \vec{N}_R$  时, 其为正形体。当  $\vec{N}$  与  $\vec{N}_R$  反向时, 其为负形体。对于一个多面体。当其面的法线指向物体内部时, 则其为负形体。由此对于  $S = A \oplus B^{-1}$  的计算由以下二步完成:

(1) 用算法一计算出二个形体的和(可以是负形

体)。

(2) 根据边的法线和面法线判定结果中的负形体, 并从结果中去掉。

以上我们得到了一个有关凸集的形态和差运算的统一算法, 下面我们讨论一般任意形体的形态和差运算。

### 2.3 任意形体的形态和差

我们首先来讨论不带孔的凹形体的计算。

在凸形体里, 其边界面  $F(A, u)$ , 是由超平面  $L(A, u)$  来定义的,  $L(A, u)$  的定义为:

$$L(A, u) = \{P \in E^d \mid \langle P, u \rangle = H(A, u)\} \quad (6)$$

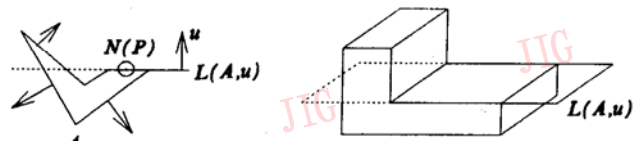


图 5  
Fig. 5

对于一个凹形体,  $L(A, u)$  的定义不再适用, 如图 5 所示。这就要求我们扩展  $L(A, u)$  的定义, 即引入局部邻域的定义。在  $A$  的边界点部的一个有限邻域  $N(P)$  里, 存在  $L(A, u)$ 。则  $L(A, u)$  为在  $A$  的  $P$  点局部超平面。由此,  $F(A, u) = L(A, u) \cap (A \cap N(P))$ 。对于  $A$  的整个边界,  $\partial A = \bigcup_{u \in S^{d-1}} F(A, u)$ , 两个形体的形态和仍然可写为:

$$A \oplus B = \bigcup_{u \in S^{d-1}} (F(A, u) \oplus F(B, u)) \quad (7)$$

但对于  $S = A \oplus B$  的边界将不再是  $\bigcup_{u \in S^{d-1}} (F(A, u) \oplus F(B, u))$ , 而是:

$$\partial S \in \bigcup_{u \in S^{d-1}} (F(A, u) \oplus F(B, u)) \quad (8)$$

我们可以用图 6 来说明这一点。

对于一个凹多边形, 当一个顶点的内角小于  $180^\circ$  时, 则这个点为凸点。当内角大于  $180^\circ$  时, 则

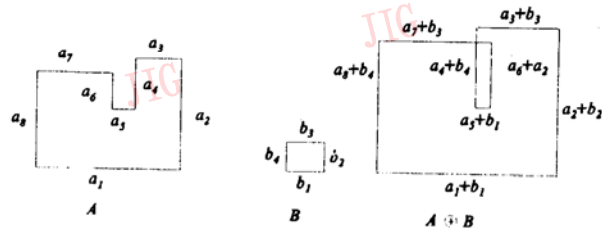


图 6  
Fig. 6

这个点称为凹点。对于一个多面体，一条边的内角小于  $180^\circ$  时为凸边，大于  $180^\circ$  时为凹边。我们可以用下面一个准则判定凸凹点。

**准则 1:** 对于一个多边形，其法线为  $\vec{N}$ ，当一个点前后边矢量积与  $\vec{N}$  同向时，这点为凸点，否则为凹点，即  $(\vec{V}_{i,i+1} \times \vec{V}_{i+1,i+2}) \cdot \vec{N} \geq 0$  为凸点。

一个凹点或凹边的特性与凸点和凸边的特性不一样的，不断连接凹点相邻的两条边可以使凹多边形向凸多边形转化。如此，则一个凹多边形可用一个凸多边形和一个负形体来表示，即  $A = B \cup C^{-1}$ ，对于凹多面体也一样： $A = B \cup \sum_i C_i^{-1}$ 。由形态和的分配律可得：

$$A \oplus D = (B + D) \cup (\sum_i (C_i^{-1} \oplus D)) \quad (9)$$

由前面的分析可知：一个负形体和正形体的形态和会出现自交的情况。由此可见，凹集的形态和不可避免会出现自交。对于凹点和凹边，我们可以负形体节点来考虑。对  $LSD(\vec{N}, A, P)$  在凹点或凹边上需要修改其定义，即改为：

**定义 3:**  $\vec{N}$  为一集合  $A$  的法线， $P$  为  $A$  上一边界点。当  $P$  为凹点或凹边上的点时，当且仅当在  $P$  点

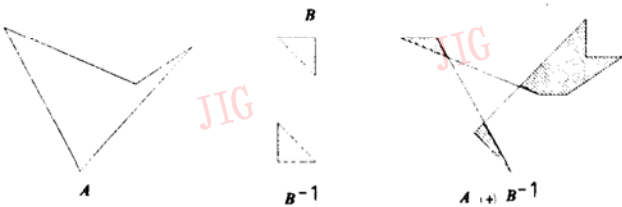


图 7  
Fig. 7

存在一个邻域与以  $\vec{N}$  为法线的半空间  $\{x: (x-P) \cdot \vec{N} > 0\}$  的交集在  $A$  的内部；当  $P$  为凸点或凸边上的点时，当且仅当在  $P$  点存在一个邻域与以  $\vec{N}$  为法线的半空间  $\{x: (x-P) \cdot \vec{N} > 0\}$  的交集  $A$  不相交。则这种关系称为广义局部方向边界关系，我们用  $LSD(\vec{N}, A, P)$  表示。

通过上面扩展  $LSD(\vec{N}, A, P)$  的定义之后，前面关于凸集的形态和计算的算法同样也适用于对凹多边形的处理，只是在其负形体判定的同时还要判

定双重域。图 7 就是一个  $E^2$  下凹多边形的结果。

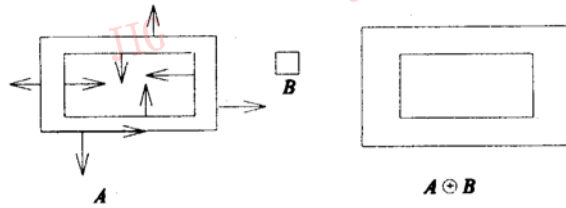


图 8  
Fig. 8

上面我们讨论了凹集的情况，下面我们再考虑更一般的情况，即一个有孔的任意形体的情况。对于一个有孔的任意形体  $A$ ，其孔为  $B$ ，我们可以将孔看成一个负形体，即一个不带孔的形体和一个带负形体的交。如图 8 所示。这样前面的算法也适用于带孔的形体。只是对孔的处理上，要将判定负形体改为判定正形体。

### 2.4 关于形态和差的统一计算

通过以上对各种形体的讨论和分析，我们可以得到以下结论：

- (1) 形态和差运算在本质上是一种相同的运算，两上形体的形态和差运算实质上是两个形体的边界运算。
- (2) 在广义上，有关凸集和凹集的运算，以及更一般的有孔情况下的运算都是一致的。
- (3) 形态和差在处理任意形体的运算中，都可以通过降维过程而把一个复杂的计算简化为有关顶点的一维计算。

下面我们给出一个三维情况下的任意形体的形态和计算的算法。该算法也适用于更高维的情况。

#### 3D-Minkowski-sum(A, B)

begin

- ① 遍历  $A$  的顶点表和  $B$  的面表，如  $LSD(\vec{N}_B, A, V_A)$  成立时，则计算  $V_A \oplus F_B$ ，并加入  $C$  的面表和顶点表中。
- ② 遍历  $A$  的面表和  $B$  的顶点表，如  $LSD(\vec{N}_A, B, V_B)$  成立，则计算  $V_B \oplus F_A$ ，将新的结果加入  $C$  的面表和顶点表中。
- ③ 遍历  $A$  的面表和  $B$  的面表，如  $\vec{N}_A = \vec{N}_B$  时，计算  $F_A \oplus F_B$ ，将新的结果加入  $C$  的面表和顶点表中。
- ④ 遍历  $A$  的边表和  $B$  的边表，如  $E_A$  与  $E_B$  不平行，则  $\vec{N} = \vec{E}_A \times \vec{E}_B$ ，如果同时

满足  $LSD(\vec{N}, A, P_A)$  和  $LSD(\vec{N}, B, P_B)$ ,  $P_A \in E_A, P_B \in E_B$ , 则计算  $E_A \oplus E_B$ , 将结果加入  $C$  中。

- ⑤ 判定  $C$  中的负形体和重复域, 如  $A, B$  中有一个为内孔, 则去掉正形体, 否则去掉负形体。

end

### 2.5 有关形态和差的进一步推广

以上我们讨论的都是有关多边形或多面体下的形态和, 即  $S = A \oplus B$ , 如果  $A$  和  $B$  的边界是曲线或曲面时, 则可用数学方程表示为:

$$\begin{aligned} \partial A &= [A_x(t_1), A_y(t_1)] \\ \partial B &= [B_x(t_2), B_y(t_2)] \end{aligned} \quad (10)$$

或

$$\begin{aligned} \partial A &= [A_x(u_1, v_1), A_y(u_1, v_1), A_z(u_1, v_1)] \\ \partial B &= [B_x(u_2, v_2), B_y(u_2, v_2), B_z(u_2, v_2)] \end{aligned} \quad (11)$$

对于  $F(A, u), F(B, u)$  则为边界上的切线或切面(图 9)。因此, 对于  $\partial S = \partial(A \oplus B)$ , 则为相应的  $F(A, u) \oplus F(B, u)$ , 即在  $A$  的边界上任一点  $a$  求其切线, 并在  $B$  的边界上找到与之相应的边切线的点  $b$ , 则  $S$  的边界上的点为  $a+b$ , 其数学分析如下:

对于  $A$  上任一点  $a = [A_x(t_1), A_y(t_1)]|_{t_1=t_1}$ , 其对应于  $B$  上一点  $b \in \partial B$ , 则

$$\left[ \frac{\partial B_y(t_2)/\partial t_2}{\partial B_x(t_2)/\partial t_2} \right] = \left[ \frac{\partial A_y(t_1)/\partial t_1}{\partial A_x(t_1)/\partial t_1} \right]_{t_1=t_1} \quad (12)$$

解上述微分方程可求得  $t_2$  的值, 即  $t_2 = h(t_1)$ 。因此,  $S$  的边界为

$$\partial S_{\text{bound}} = [A_x(t_1) + B_x(h(t_1)), A_y(t_1) + B_y(h(t_1))] \quad (13)$$

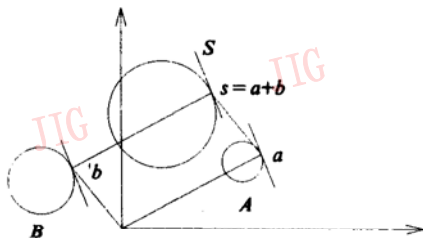


图 9  
Fig. 9

其中,  $\partial S_{\text{bound}}$  可能存在自交的情况, 在去掉自交部分后, 即为  $\partial S$ 。对于三维曲面也如此。

由以上分析可以看出, 在几何造型中, 平行扫描

sweep 等操作就是一种形体的形态和运算。

### 3 形态和在三维变形中的应用

三维变形也就是二个形体之间的一种线性内插, 正如第一节里指出的, 它可用下式来表示:

$$C(t) = (1-t) * A + t * B \quad (14)$$

其中,  $t$  为比例因子, “\*”表示比例因子对形体的作用, 因此有  $C(0) = A, C(1) = B$ 。(其中定义  $0 * A$  为一个空集), 对于“+”运算, 可以是集合并运算, 也可以是 Minkowski 和运算“ $\oplus$ ”。很明显, Minkowski 和运算比并运算更接近我们的要求。因此, 三维变形可以用下式来准确定义。

$$C(t) = (1-t) * A \oplus t * B \quad (15)$$

对于一个复杂的形体, 它也可以用一组简单的形体的集合来表示, 即  $A = \cup_i A_i, A_i$  为简单形体。由此, 对于任意形体, 变形公式可以写为:

$$\begin{aligned} C(t) &= (1-t) * \cup_i A_i \oplus t * \cup_j B_j \\ &= \cup_{i,j} [(1-t) * A_i \oplus t * B_j] \end{aligned} \quad (16)$$

由于  $A_i, B_j$  可以是各种形体, 因此我们可以用这种方法很简单地实现拓扑不同结构的形体之间的变形。图 10(图版 I)给出的是相同拓扑结构形体间的变形结果, 图 11(图版 I)给出的是拓扑结构不同形体间的变形结果。

上面讨论的是二个形体之间的内插变形。对于多个形体, 同样也可以实现它们之间的变形, 我们定义  $C(t) = \cup_{ij} [(1-t) * A_i \oplus t * B_j]$  为  $DOF(A, B, t)$ , 则变形  $DOF(DOF(A, B, t), DOF(B, C, t), t)$  为一 Bezier 变形, 它的前后结果为  $A, C$ 。但中间结果将受到  $B$  形体的影响。在这里, 我们可以把  $DOF(DOF(A, B, t), DOF(B, C, t), t)$  看成一空间的形体曲线, 其控制顶点为形体, 即如图 12 表示。因此我们可以进一步扩展曲线的阶数, 三次或更多次的曲线也可以产生, 通过控制顶点处的形体的位置、大小、形状等, 从而可以控制一个复杂变形动画过程, 这一点对于其它算法是比较难以达到的。

上面讨论的是形体曲线, 同样也可以将变形扩展成一个形体曲面, 对于形体  $A, B, C, D$ , 可以用二个变形系数来控制。即:

$$\begin{aligned} S(u, v) &= DOF[DOF(A, B, u), DOF(C, D, v), v] \\ S(0, 0) &= A, \quad S(1, 0) = B \\ S(0, 1) &= C, \quad S(1, 1) = D \end{aligned} \quad (17)$$

通过改变  $u, v$  值, 可以交互地得到其中间状态。同样, 我们也可以定义更高次曲线, 图 13(图版 I)给出

了  $u, v$  在不同值时的三个形体间的变形的结果。

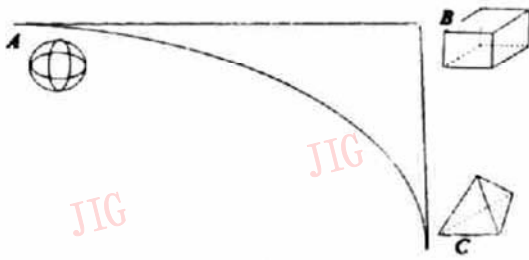


图 12  
Fig. 12

## 4 结 论

本文在形体的形态和差的概念基础上,给出了一个超平面的定义,从而有效地定义了连续集合的边界  $F(A, u)$ 。任意形体的形态和差实质上在于边界的形态和。本文给出了一个负形体的定义,从而使形态和差运算得到了统一。使差运算能转化为和运算,同时使凹集的运算、有孔形体的运算和简单的凸集运算能统一起来,在这个基础上本文给出了一个对任意形体进行形态和差运算的统一计算的算法。

并进一步由平面扩展到了曲线和曲面情况。

本文在最后利用形体的形态和给出了三维形体之间的变形算法的统一描述,任意不同拓扑结构的形体之间的变形,可以用形态和的方式给予描述和计算,同时对线性变形进行了扩展,引入了形体曲线和形体曲面,利用形体曲线、形体曲面,给出了一个交互控制形体设计的新方法。

## 参 考 文 献

- [1] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Vol. 2, Academic Press, New York, 1988.
- [2] 吴敏金. 图象形态学. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1991.
- [3] J. T. Schwartz. Finding the minimum distance between two convex Polygons. *Inform. Proc. Lett.* 13, 168-170, 1981.
- [4] L. J. Guibas, L. Ramshaw, and J. Stolfi. A kinetic framework for computational geometry. *Proc. IEEE 24th Ann. Symp. Found. Comp. Sci.* 100-111, 1983.
- [5] P. K. Ghosh. A solution of polygons containment, spatial planning, and other related problems using Minkowski operations. *Comp. Vision Graph. Image Proc.* 49, 1-35, 1990.
- [6] A. Kaul and J. Rossignac. Solid - interpolating deformations: Construction and animation of PIPs. *Comp. & Graph.* 16, 107-115, 1992.



方伟, 讲师。1989年清华大学电子工程系毕业并获学士学位, 1991年获硕士学位, 1994年获博士学位。之后在清华大学电子工程系图象中心从事计算机图形工作。现在新加坡南洋理工大学从事博士后工作。主要研究方向为: 三维计算机动画, CAD/CAM, 三维真实感图形, 数据可视化, 三维CT重建, 以及多媒体应用及系统。

# 3D Object Morphology Operation's Computation and it's Application

Fang Wei, Li Shuliang, Wu Youshou

(Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing, 100084)

**Abstract** In the paper, the problem of boundary-represented objects' morphology operations is first discussed. In this paper, arbitrary shaped objects include convex objects and non convex objects are discussed, the concept of negative shaped object is introduced and a unified algorithm to compute Minkowski operations of 2D and 3D continuous objects is presented. By using this algorithm, a new algorithm of deformations between 3D arbitrary shaped objects is presented, the concept of boundary-represented objects' morphology operations is expanded to arbitrary curve and arbitrary curved surface and the concept of curve in the 3D objects' space and biparametric patch in the 3D objects' space is introduced. The 3D morphing algorithm of arbitrary shaped objects in this paper can well resolve the problem of deformations between 3D boundary-represented objects having difference structure of topology.

**Keywords** Minkowski operation, Mathematical morphology, Morphing